Двадцатый Первый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 16 октября 2010.

Третий тур. Лига тактик.

1. Найдите все функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что для всех натуральных x и y верно равенство $f(f(x+y)) = f(x) + y$.

2. Натуральное число $n \geqslant 4$ таково, что $\left[\frac{2^n}{n}\right]$ — степень двойки. Докажите, что n — тоже степень двойки.

3. Существует ли такой граф, что степени всех его вершин равны 6, и его вершины можно покрасить в три цвета так, что любой простой цикл содержит вершины всех трех цветов?

4. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что $AB = A_1B_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = 60^\circ$ и $\angle ABC + \angle A_1B_1C_1 = 180^\circ$. Докажите, что $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{A_1C_1}$.

5. Пусть положительные числа a, b и c таковы, что $abc = 1$. Докажите неравенство:

$$\frac{c}{a^4+b^2+1} + \frac{b}{c^4+a^2+1} + \frac{a}{b^4+c^2+1} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{2}}.$$

6. В ромбе $ABCD$ на отрезках AC и BC выбраны точки M и N соответственно, так, что $NM = MD$. Прямая DN пересекает отрезок AC в точке P, а прямая DM пересекает отрезок AB в точке R. Докажите, что $RP = PD$.

7. Дано n различных натуральных чисел. Докажите, что среди них найдутся два числа, наименьшее общее кратное которых не меньше, чем $\frac{n^2}{4}$.

8. Химкинский лес имеет форму правильного треугольника, со стороной 2010 метров, которой разбит на 2010^2 правильных треугольников со сторой 1 метр. В всех вершинах этих треугольников растут деревья. Областная администрация разрешила спилить несколько деревьев так, чтобы ни с какого пня нельзя было бы увидеть другой пень. Один пень виден из другого тогда и только тогда, когда на отрезке между ними нет деревьев. Какое наибольшее число деревьев можно спилить?

9. Пусть $x > 1$ — рациональное число. Положим: $a_n = \{x^{n+1}\} - x\{x^n\}$. Докажите, что последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ не является периодической.

10. Поля на ленте пронумерованы числами 1, 2, 3, ... В поле с номером 2 находится фишка. Двое играют в игру. За ход фишку можно подвинуть вправо хотя бы на одно, но не более чем на 2010 полей. Проигрывает тот, кто ставит фишку на поле с составным номером. Кто выигрывает при правильной игре?